

**TITULO:** Determinación de la ecuación de regresión que rige el proceso de extracción de cobalto a partir de las colas de la tecnología carbonato amoniacal utilizando un ácido orgánico como agente lixiviante.

**TITLE:** Determination of the regression equation in the process of cobalt extraction starting from the solid residual of the technology carbonates ammonia using an organic acid as leaching agent.

**AUTORES:**

Ing. Yosvany Ferreiro Guerrero, Técnico Superior Investigador \*

Ing. Alexeis Sánchez Cruz, Técnico Superior Investigador \*

Dr. Amaury Palacios Rodríguez, Profesor Auxiliar \*\*

Lic. Tomás Fernández Columbié., Profesor Asistente \*\*

**PAÍS:** Cuba

**RESUMEN:**

Se determinó la ecuación de regresión que mejor representa la relación existente entre la variable extracción de cobalto y las variables explicativas concentración de ácido, flujo de solución y contenido de sólido, estudiadas durante la lixiviación ácida de las colas de la fábrica de níquel Comandante René Ramos Latour de Nicaro. Para ello se utilizó el paquete estadístico Gretl Versión 1.4.1 con el que se corrieron los resultados obtenidos durante la investigación a escala de laboratorio. Se obtuvo el modelo estadístico más significativo, llegando a la conclusión de que la única variable independiente que no es significativa a un nivel de significación del 5 % es la concentración inicial de ácido.

**PALABRAS CLAVES:** LIXIVIACIÓN, ECUACION DE REGRESION, COLAS, TECNOLOGÍA CARBONATO AMONIACAL.

**ABSTRACT:**

The purpose of the work was to determine the regression equation that represents the existent relationship among the variable cobalt extraction and the variables explanatory acid concentration, solution flow and solid content, studied during the acid leaching of the solids dump of the nickel factory Major René Ramos Latour of Nicaro. It was used the statistical package Gretl Version 1.4.1 with the one was scrolled the results obtained during the investigation at laboratory scale. The most significant statistical model was obtained, reaching the conclusion that the only independent variable that is not significant at a level of significance of 5% is the initial concentration of acid.

**KEY WORDS:** LEACHING, REGRESSION EQUATION, SOLIDS RESIDUALS, CARBONATE AMMONIAN TECHNOLOGY.

## INTRODUCCIÓN

En Cuba la recuperación del níquel a partir del mineral laterítico se lleva a cabo por las tecnologías: Lixiviación Ácida a Presión y Carbonato Amoniacal.

En la planta " COMANDANTE RENÉ RAMOS LATOUR " de Nicaro, el mineral laterítico se procesa por la vía Carbonato Amoniacal.

En /1/ se plantea que esta tecnología genera alrededor del 82% de desechos (colas) del material alimentado inicialmente y en estas colas el contenido de óxido de níquel se encuentra entre 0,37 – 0,57, debido a la ineficiencia del proceso; en esta investigación se somete este residuo sólido a un proceso de lixiviación ácida orgánica a nivel de laboratorio para valorar la recuperación de elementos valiosos tales como el níquel.

En ocasiones los investigadores utilizan un conjunto de métodos estadísticos que encuentran su aplicación en trabajos donde el interés se centra en el análisis de una única variable. Sin embargo, es de señalar, que en la mayoría de los problemas que se presentan en el trabajo investigativo surge la necesidad de observar dos o más variables, las que pueden ser concomitantes o estar relacionadas entre sí.

El análisis de Regresión y Correlación es una rama de la teoría estadística de gran utilidad en casi todas las disciplinas científicas. Es considerado como la técnica básica para medir o estimar la relación existente entre variables.

El análisis de correlación desarrolla métodos que sirven para investigar si dos o más variables están relacionadas y para medir la intensidad de esta relación.

Con el análisis de regresión se determina el modelo o la ecuación matemática que mejor representa la relación existente entre las variables analizadas.

No en pocas investigaciones se obtienen modelos matemáticos en los cuales se aprecian las relaciones existentes entre las variables dependientes y las independientes, sin embargo en los análisis estadísticos no siempre se tienen en cuenta el cumplimiento o no de los supuestos básicos del modelo, los cuales dan una idea de cuán significativo o real puede ser un modelo estadístico obtenido de corridas experimentales en el campo de las ciencias.

En este estudio se tuvieron en cuenta y verificaron los siguientes Supuestos del Modelo:

1. El valor esperado o promedio de la variable dependiente coincide con el valor que ofrece la ecuación deregresión.

( $E(Y/X_i)$ )=Valor obtenido por la ecuación de regresión).

2. Homocedasticidad, o sea todas las perturbaciones tienen igual varianza.  
 $V(y_i) = \sigma^2$  para todo  $i=1,2,3\dots n$

Determinación de la ecuación de regresión que rige el proceso de extracción de cobalto a partir de las colas de la tecnología carbonato amoniacal utilizando un ácido orgánico como agente lixiviante.

3. Para cada valor fijo de las variables independientes los valores de las observaciones de la variable dependiente son estadísticamente independientes.

$Cov(y_i, y_j) = E(y_i, y_j) = 0$  para  $i \neq j$ .

4. No multicolinealidad entre las variables independientes.

5. Las observaciones de la variable dependiente se distribuyen normalmente.

Las  $y_i \rightarrow N(E(y/X_i), \sigma)$

Si se cumplen estos supuestos, las estimaciones mínimo cuadráticas de los parámetros resultan de varianza mínima en la clase de los estimadores insesgados, o sea se obtienen los parámetros del Mejor Estimador Lineal Insesgado.

Si estos supuestos o hipótesis se incumplen, se presentan una serie de inconvenientes que impiden que el modelo matemático obtenido no sea el mejor estimador para representar la relación existente entre las variables / 2/.

## **MATERIALES Y METODOS.**

Para la investigación se utilizaron las instalaciones del laboratorio de hidrometalurgia del ISMM, en la cual las variables analizadas fueron extracción de níquel, cantidad de sólido alimentado, concentración inicial del ácido y el flujo de solución.

Las extracciones promedio de níquel obtenidas según los análisis químicos realizados en los laboratorios del Centro de Investigaciones del Níquel de Moa, fueron procesadas en el paquete estadístico **GRETl Versión 1.4.1** utilizando el Método de los Mínimos Cuadrados Ordinarios (MMCO), con el objetivo de minimizar la suma de los cuadrados de los errores de estimación, o lo que es lo mismo ajustar los 8 valores promedios de extracción obtenidos al modelo seleccionado, para de esta forma estimar de forma eficiente los parámetros del mismo debido a que la ecuación de regresión estimada ha de utilizarse con fines predictivos.

## **RESULTADOS DEL TRABAJO**

Al introducir en el paquete estadístico los valores de las variables independientes:  $X_1$ , cantidad de sólido (%);  $X_2$ , concentración inicial de ácido (mol/l); y  $X_3$  flujo de solución (ml/min), así como los valores promedios de la variable dependiente  $Y$ , extracción de cobalto (%) calculadas para las 8 pruebas, se obtiene la siguiente salida del mismo.

**Modelo 1: Estimaciones MCO utilizando las 8 observaciones 1-8**  
**Variable dependiente: Extracción de cobalto**

<i>Variable</i>	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. típica</i>	<i>Estadístico t</i>	<i>valor p</i>
0 const	50,5674	18,458	2,7396	0,051928 *
2 x1	-0,933816	0,348361	-2,6806	0,055194 *
3 x2	-10,0417	22,0629	-0,4551	0,672619
4 x3	0,108575	0,0661887	1,6404	0,176269

Media de la var. dependiente = 46,7863  
D.T. de la var. dependiente = 13,2772  
Suma de cuadrados de los residuos = 350,475  
Desviación típica de los residuos = 9,36049  
 $R^2 = 0,715982$   
 $R^2$  corregido = 0,502968  
Estadístico F (3, 4) = 3,3612 (valor p = 0,136)

Con valor de t-student tabulado (4 grados de libertad) igual a 2,132 (para un nivel de significación del 5 %). Y valor de F-Fisher tabulado con 3 y 4 grados de libertad en el numerador y denominador igual a 3,36 (para un nivel de significación del 5 %)

Por lo que el modelo matemático obtenido es el siguiente:

$$Y = 50,56 - 0,93 X_1 - 10,04 X_2 + 0,11 X_3$$

Interpretando el valor del coeficiente de determinación ( R-cuadrado ) indica que el modelo explica un 71,5982% de la variabilidad en la extracción del cobalto. El estadístico R-cuadrado ajustado, que es más conveniente para comparar modelos con diferentes números de variables independientes, es de 50,2968%.

Calculando el coeficiente de correlación entre la variable dependiente y las independientes según la fórmula:

$$r(Y, X_1, X_2, X_3) = \sqrt{R^2}$$

Se obtiene que es de 0,71, indicando la existencia de una relación relativamente fuerte entre la extracción y las variables independientes.

Contrastando la hipótesis  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$  se obtiene mediante el estadístico F- Fisher (p-1, n-p grados de libertad en el numerador y denominador respectivamente):  $F(3, 4) = 3,3612$  que es menor que el F tabulado ( $3,3612 < 6,59$ ) por lo que se acepta la hipótesis de que todos los parámetros estimados en la ecuación sean igual a cero, por ende el modelo obtenido no es representativo.

Teniendo en cuenta que el valor de probabilidad del estadístico t-Student más elevado (**P(t)= 0,672619**) le corresponde a la variable  $X_2$  se decide correr la regresión simple entre la variable dependiente (Y) y las variables independientes  $X_1$  y  $X_3$  eliminando la variable  $X_2$  del modelo para analizar la significación del mismo obteniéndose la siguiente salida del paquete estadístico:

Determinación de la ecuación de regresión que rige el proceso de extracción de cobalto a partir de las colas de la tecnología carbonato amoniacal utilizando un ácido orgánico como agente lixiviante.

**Modelo 2: estimaciones MCO utilizando las 8 observaciones 1-8**  
**Variable dependiente: Extracción de cobalto**

<i>Variable</i>	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. típica</i>	<i>Estadístico t</i>	<i>valor p</i>
0 const	44,0403	10,6595	4,1315	0,009071 ***
2 x1	-0,933816	0,31955	-2,9223	0,032926 **
4 x3	0,108575	0,0607145	1,7883	0,133760

Media de la var. dependiente = 46,7863

D.T. de la var. dependiente = 13,2772

Suma de cuadrados de los residuos = 368,626

Desviación típica de los residuos = 8,58633

$R^2 = 0,701273$

$R^2$  corregido = 0,581782

Estadístico F (2, 5) = 5,86885 (valor p = 0,0488)

Con valor de t-student tabulado (5 grados de libertad) igual a 2,571 (para un nivel de significación del 5 %). Y valor de F-Fisher tabulado con 2 y 5 grados de libertad en el numerador y denominador igual a 5,79 (para un nivel de significación del 5 %)

Por lo que el modelo matemático obtenido es el siguiente:

$$Y = 44,04 - 0,9338X_1 + 0,1085 X_3$$

Interpretando el valor del coeficiente de determinación ( R-cuadrado ) indica que el modelo explica un 70,12 % de la variabilidad en la extracción del cobalto. El estadístico R-cuadrado ajustado, que es más conveniente para comparar modelos con diferentes números de variables independientes, es de 58,1782%.

Calculando el coeficiente de correlación entre la variable dependiente y las independientes según la fórmula:

$$r(Y, X_1, X_3) = \sqrt{R^2}$$

se obtiene que es de 0,76, indicando la existencia de una relación relativamente fuerte y superior al modelo anterior (0,76 > 0,71).

Contrastando la hipótesis  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$  se obtiene mediante el estadístico F-Fisher ( p-1;n-p grados de libertad en el numerador y denominador respectivamente): **F(2;5) = 5,86885** que es mayor que el F tabulado (5,86885 > 5,79) por lo que se rechaza la hipótesis de que todos los parámetros estimados en la ecuación sean igual a cero, por tanto el modelo en su conjunto es significativo con un 95 % de confianza.

Los resultados de esta prueba de hipótesis muestran que no todos los coeficientes de la ecuación son iguales a cero, pero la misma no dice si existe alguna variable irrelevante en el modelo. Esto se resuelve con las pruebas parciales, en dicha prueba se contrastan las hipótesis:

$$I. H_0 : (\beta_1 / \beta_2) = 0 ; H_1 : (\beta_1 / \beta_2) \neq 0$$

II.  $H_0 : (\beta_2 / \beta_1) = 0$  ;  $H_1 : (\beta_2 / \beta_1) \neq 0$

Siendo el estadístico de prueba

$$t_0 = \frac{b_j}{S_{b_j}}$$

la región crítica de rechazo (w) de la hipótesis viene dada por :

$$W = \left( t_0 > t_{\alpha/2, (n-p)} \text{ ó } t_0 < -t_{\alpha/2, (n-p)} \right)$$

Donde:

$b_j$  : coeficiente de la ecuación de regresión.

$S_{b_j}$  : Desviación típica del coeficiente  $b_j$ .

$t_0$  : el valor calculado del estadístico de prueba

$t_{\alpha/2}$  : Valor tabulado de el estadístico t-student para (n-p) grados de libertad y (1- $\alpha/2$ ) nivel de confianza.

$\alpha$  (alfa): nivel de significación (para este caso trabajamos con  $\alpha = 0,05$ )

n: Número de observaciones (8)

p: Número de parámetros del modelo(3)

Por lo que observando los valores modulares del estadístico t presentes en la respuesta del paquete en el modelo 2 para la variable  $X_1$  ( $t = 2,9223$ ) y comparándolos con el valor de  $t_{\alpha/2} = 2,571$  apreciamos que el valor calculado es mayor que el tabulado ( $2,9223 > 2,571$ ) para el dúo de hipótesis I, por lo que en este caso se rechace la hipótesis  $H_0$ , concluyéndose que la variable  $X_1$  sí realiza un aporte significativo al modelo estando presente la variable  $X_3$  en el mismo.

Para el caso de la variable  $X_3$  apreciamos que el valor del estadístico t calculado es menor que el valor del estadístico  $t_{\alpha/2}$  ( $1,7883 < 2,571$ ) aceptándose  $H_0$  en II concluyéndose que la variable  $X_3$  no es significativa en este modelo para un 95 % de confianza.

Teniendo en cuenta los resultados de las pruebas parciales se decide correr la regresión eliminando la variable  $X_3$ , obteniéndose la siguiente salida del paquete estadístico:

Determinación de la ecuación de regresión que rige el proceso de extracción de cobalto a partir de las colas de la tecnología carbonato amoniacal utilizando un ácido orgánico como agente lixiviante.

**Modelo 3: estimaciones MCO utilizando las 8 observaciones 1-8**  
**Variable dependiente: Extracción de cobalto**

Variable	Coefficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
0 const	60,3266	6,47499	9,3169	0,000087 ***
2 x1	-0,933816	0,373522	-2,5000	0,046527 **

Media de la var. dependiente = 46,7863  
D.T. de la var. dependiente = 13,2772  
Suma de cuadrados de los residuos = 604,396  
Desviación típica de los residuos = 10,0366  
 $R^2 = 0,510209$   
 $R^2$  corregido = 0,428578  
Grados de libertad = 6

Teniendo en cuenta que los valores de las probabilidades marginales del estadístico t son 0,000087 y 0,046527 para las constantes  $\beta_0$  y  $\beta_1$  respectivamente, los cuales en ambos casos son inferiores al nivel de significación ( $\alpha = 0,05$ ) se concluye que el modelo es significativo, no obstante observando los valores de  $R^2 = 0,510209$  y  $R^2$  corregido = 0,428578 nos demuestran que este modelo solo explica el 42 % de la variación de la extracción del cobalto, inferior al modelo 2 en el que estaban presentes las variables  $X_1$  y  $X_3$ .

Por lo planteado y el análisis realizado anteriormente se escoge la ecuación de regresión obtenida en el modelo 2 como la ecuación que mejor representa la relación existente entre las variables, por lo que a continuación se verifican los supuestos básicos del modelo para esta ecuación:

- Salida del paquete estadístico para la prueba de homocedasticidad

- **Contraste de heterocedasticidad de White**

Hipótesis nula: No hay heterocedasticidad  
Estadístico de contraste:  $TR^2 = 7,94777$   
con valor p =  $P(\text{Chi-Square}(3) > 7,94777) = 0,0471035$

Teniendo en cuenta que el valor de las probabilidades marginales del estadístico Chi-Cuadrado es menor que el nivel de significación ( $\alpha = 0,05$ ) se rechaza la hipótesis nula, lo que significa que este modelo tiene presencia de heterocedasticidad entre los residuos, incumpliendo con el supuesto de igual varianza de los residuos, por lo que se corrigió la heterocedasticidad utilizando la opción de corregido de heterocedasticidad en el paquete estadístico, obteniéndose la siguiente salida del mismo.

**Modelo 4: estimaciones con corrección de heterocedasticidad utilizando las 8 observaciones 1-8**

**Variable dependiente: Extracción de cobalto**

	VARIABLE	COEFICIENTE	DESV.TÍP.	ESTAD.T	2Prob(t>  T )
0)	const	43,1886	9,36686	4,611	0,005783
2)	X <sub>1</sub>	-0,933048	0,318039	-2,934	0,032491
4)	X <sub>3</sub>	0,114143	0,0399854	2,855	0,035630

**Estadísticos basados en los datos ponderados:**

Suma de cuadrados de los residuos = 17,8915

Desviación típica de los residuos = 1,89164

R-cuadrado = 0,770176

R-cuadrado corregido = 0,678246

Estadístico F (2, 5) = 8,37787 (valor p = 0,0253)

**Estadísticos basados en los datos originales:**

Media de la var. dependiente = 46,7863

D.T. de la var. dependiente = 13,2772

Suma de cuadrados de los residuos = 369,246

Desviación típica de los residuos = 8,59356

Por lo que el modelo estadístico 2 con la heterocedasticidad corregida quedaría de la siguiente forma:

$$Y = 43,1886 - 0,933 X_1 + 0,114 X_3$$

Al comprobar los restantes supuestos básicos del modelo se obtuvo la siguiente salida del paquete estadístico:

- Prueba de Normalidad.

**Contraste de normalidad de los residuos -**

**Hipótesis nula: el error se distribuye normalmente**  
**Estadístico de contraste: Chi-cuadrado(2) = 3,17455**  
**con valor p = 0,204482**

Teniendo en cuenta que la probabilidad marginal del estadístico Chi-Cuadrado es mayor que el nivel de significación ( $0,204482 > 0,05$ ) se acepta la hipótesis nula, cumpliendo la ecuación de regresión con el supuesto de normalidad de los residuos.

- Salida del paquete estadístico para la prueba de multicolinealidad entre las variables independientes.

**Factores de inflación de varianza (VIF)**  
**Mínimo valor posible = 1.0**



Determinación de la ecuación de regresión que rige el proceso de extracción de cobalto a partir de las colas de la tecnología carbonato amoniacal utilizando un ácido orgánico como agente lixiviante.

### **Valores mayores que 10.0 pueden indicar un problema de colinealidad**

2)  $X_1$  1,000

4)  $X_3$  1,000

**VIF(j) =  $1/(1 - R(j)^2)$ , donde R(j) es el coeficiente de correlación múltiple entre la variable j y las demás variables independientes**

Como se aprecia los valores de inflación de varianza son inferiores a 10 lo que indica que no existe problema de colinealidad entre las variables  $X_1$  y  $X_3$  cumpliéndose el supuesto de No multicolinealidad.

- Salida del paquete estadístico para la prueba de no autocorrelación entre los residuos.

- **Hipótesis nula: No existe autocorrelación entre los residuos.**

**Estadístico de contraste: Durbin-Watson = 1,27645  
con valor p = 0,0926**

Teniendo en cuenta que el valor de la probabilidad marginal para el estadístico de Durbin-Watson es de 0,0926, o sea mayor que el nivel de significación ( $\alpha = 0,05$ ) se acepta la hipótesis nula con una confiabilidad del 95 %, concluyéndose que no existe autocorrelación entre los residuos.

### **CONCLUSIONES**

Del análisis estadístico realizado al proceso de lixiviación del cobalto presente en las colas de la fábrica de Nicaro se llega a las siguientes conclusiones:

1. Estadísticamente con un nivel de confianza del 95 % la variable concentración inicial de ácido no es significativa.

2. El modelo estadístico obtenido que mejor representa la relación entre las variables es

$$Y = 43,1886 - 0,933X_1 + 0,114 X_3$$

3. Según el modelo estadístico obtenido para un aumento del contenido de sólido alimentado disminuye la extracción del níquel y para un aumento del flujo de la solución aumenta la extracción del níquel.

4. El modelo estadístico obtenido cumple con todos los supuestos básicos del modelo.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Ferreiro Yosvany Guerrero. Evaluación experimental de la recuperación del cobalto con ácido orgánico a partir de las colas de la Empresa René Ramos Latour de Nicaro. Moa; Instituto Superior Minero Metalúrgico, 2001. 70 h. (Trabajo de Diploma).
2. Ferreiro, Yosvany Guerrero, Santiesteban Domínguez, Eider, Leyva Ramírez, Emilio. Estudio de las regularidades físico químicas de la lixiviación del magnesio presente en las colas de la fábrica de níquel René Ramos Latour de Nicaro. Nicaro. **Revista electrónica "Ciencias Holguín"** 2005; 11(4):5; dic. 2005 [Seriada en línea] <http://www.ciencias.holguin.cu/2005/Diciembre/ARTI5.htm> [Consultado: sep.2006].
3. Leyva Ramírez, Emilio... [et al.]. Investigaciones preliminares con el concentrado de cromita obtenido de las colas de Nicaro. **Revista electrónica "Ciencias Holguín"** 2000; 6(2):3; ago. 2000. [Seriada en línea] <http://www.ciencias.holguin.cu/2000/Agosto/articulos/ARTI3.HTM> [Consultado: 18 ene.2007].
4. Leyva Ramírez, Emilio... [et al.]. Repercusión social del desarrollo de una Tecnología para la Obtención de Concentrados de Hierro y de Cromita a partir de Residuales de la Industria del Níquel. **Revista electrónica "Ciencias Holguín"** 2004; 10(2):8; jun. 2004. [Seriada en línea] <http://www.ciencias.holguin.cu/2004/Junio/articulos/ARTI8.htm> [Consultado: 18 ene.2007].
5. Neninger D. Análisis de regresión y series cronológicas. La Habana. Ed Félix Varela, 2004. 392 p.

## DATOS DE LOS AUTORES

### Nombre:

Ing. Yosvany Ferreiro Guerrero, Técnico Superior Investigador \*

Ing. Alexeis Sánchez Cruz, Técnico Superior Investigador \*

Dr. Amaury Palacios Rodríguez, Profesor Auxiliar \*\*

Lic. Tomás Fernández Columbié., Profesor Asistente \*\*

### Correo:

[yosvany@dsit.cu](mailto:yosvany@dsit.cu)

### Centro de trabajo:

\* Centro de Investigaciones Siderúrgicas. Dique Norte, La Pasa, Nicaro, Mayarí, Holguín, Cuba.

\*\* Instituto Superior Minero Metalúrgico. Reparto Miraflores, Moa, Holguín, Cuba.